## Calculs dans $\mathbb{C}$

**EXERCICE 1.** Mettre sous forme algébrique $u = -\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$ et $z = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$

---

**EXERCICE 2.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|z-i| = |z+i| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

---

**EXERCICE 3.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Démontrer

$$\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow |z| = 1$$

---

**EXERCICE 4.** Décrire géométriquement l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |1-z|\}$. (On explicitera les parties réelles et imaginaires des nombres complexes appartenant à cet ensemble.)

---

**EXERCICE 5.** Montrer que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ on a *l'identité du parallélogramme* :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

et l'interpréter géométriquement.

---

**EXERCICE 6.** Soit $z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}$

1) Démontrer par récurrence que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2) Montrer

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + 2 \sum_{1\leq j<k\leq n} \mathrm{Re}(z_j \overline{z}_k)$$

---

**EXERCICE 7.** On note $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a : $\overline{f(z)} = \dfrac{1}{f(\overline{z})}$.

---

**EXERCICE 8 ☆ .** Déterminer les applications $f : \mathbb{C} \to C$ telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(x) = x \\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 & \begin{cases} f(z+z') = & f(z) + f(z') \\ f(zz') = & f(z)f(z') \end{cases} \end{cases}$$

---

## Forme trigonométrique et trigonométrie

**EXERCICE 9.** Mettre sous forme trigonométrique $u = 1-i$, $v = \dfrac{3}{1-i}$ et $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

---

**EXERCICE 10.** On considère les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{3}}, a = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \dfrac{a}{b}$. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

---

**EXERCICE 11.** Linéariser l'expression $\sin^5(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Linéariser l'expression $\cos^2(x)\sin^3(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Exprimer $\sin(5t)$ en fonction de $\sin(t)$.

---

**EXERCICE 12.** Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

1) Soient $p$ et $q$ deux nombres réels tels que la quantité $A = \dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$ a un sens. Simplifier cette formule.
2) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

---

**EXERCICE 13.** Résoudre les équations suivantes :

$$\cos x + \sin x = 1 \quad \cos x - \sqrt{3}\sin x = 1 \quad \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$$

---

**EXERCICE 14.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb) \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb).$$

---

**EXERCICE 15 ☆ . Oral centrale** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que

$$|1 + z| \geq 1 \text{ ou } |z^2 + 1| \geq 1.$$

---

## Racines et Résolution d'équations

**EXERCICE 16.** Déterminer :

1) Les racines carrées de $\dfrac{-3i}{1 - i\sqrt{3}}$
2) Les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1 + i)$
3) Les racines cinquième de $32i$
4) Les racines carrées de $\dfrac{1 - \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$, $\quad \theta \in ]0, \pi[$

---

**EXERCICE 17.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$
2) $z^2 - 4(1 - i)z + 2(4 - i) = 0$
3) $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i)z + 12 = 0$ (On cherchera une solution réelle en premier lieu).
4) $z^4 - z^2 + 1 = 0$
5) $e^z = 1 - i\sqrt{3}$

---

**EXERCICE 18.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ $n + 1$ réels. On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

1) Démontrer : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.
2) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Démontrer
$$P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow P(\overline{\alpha}) = 0$$

---

**EXERCICE 19.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} u + v & = 2 \\ uv & = -4 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} u + v & = 4 \\ 1/u + 1/v & = 4 \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} u + v & = 4 \\ u^2 + v^2 & = 2 \end{cases}$$

---

**EXERCICE 20.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = (z-1)^n$.

---

**EXERCICE 21.** Soit $n \geq 3$, $\omega$ une racine $n$-ième de l'unité et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

---

**EXERCICE 22 ☆ .** Résoudre le système

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c &= 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c &= 0 \end{cases}$$

---

**EXERCICE 23 ☆ .** Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On définit :

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{k} \quad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1[3]}}^{n} \binom{n}{k} \quad C = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2[3]}}^{n} \binom{n}{k}$$

1) Calculer $A+B+C$, $\quad A+jB+j^2C$, $\quad A+j^2B+jC$.
2) En déduire $A$

---

## Géométrie complexe

**EXERCICE 24.** On considère les points $A, B, C$ affixes respectives $a = 1, b = 1+2i$ et $c = 1+\sqrt{3}+i$. Déterminer la nature du triangle $ABC$.

---

**EXERCICE 25.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan complexe dont les affixes $z$ vérifient :

1) $|z+3| = 5$
2) $|z-2| = |z+7+i|$
3) $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$
4) $z + \overline{z} = |z|^2$

---

**EXERCICE 26.** Décrire géométriquement la transformation géométrique correspondant à l'application :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f(z) = (i+\sqrt{3})z - 2 + 3i.$$

---

**EXERCICE 27.** Donner l'expression de la transformation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ correspondant à la rotation de centre $A(1,1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.